Recapitulare numere complexe

Note de curs pentru disciplina **Procesarea Semnalelor**

Algebră, geometrie, formula lui Euler și aplicații

Cristian Rusu

Universitatea din București

De ce folosim j, nu i?

În matematică și în fizică, unitatea imaginară se notează de obicei cu i. În ingineria electrică se folosește frecvent j, pentru a nu o confunda cu $i(t)$, notația pentru intensitatea curentului electric [1]. **Este aceeași unitate imaginară, nu un alt număr.** În întregul document vom scrie

$$\boxed{\mathrm{j}^2 = -1, \qquad z = a + \mathrm{j}b, \quad a, b \in \mathbb{R}.}$$

Scrierea informală $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ trebuie înțeleasă cu această convenție: ecuația $z^2 = -1$ are două soluții, j și $-\mathrm{j}$, iar j se reprezintă pe semiaxa imaginară pozitivă. Litera i dintr-un eventual $i(t)$ va însemna curent electric, nu unitatea imaginară.

Punctul de plecare este simplu: un număr complex păstrează două coordonate reale, dar permite și o înmulțire care descrie rotații. Formula lui Euler va lega această geometrie de exponențiale, de sinus și de cosinus. Vom distinge explicit între *definirea* exponențialei complexe și *demonstrarea* proprietăților sale. Toate unghiurile sunt în radiani, cu excepția echivalențelor în grade indicate explicit.

Notă:Acest document a fost generat de către ChatGPT pornind de la notițele fizice personale scanate ale autorului și de la mai multe cursuri universitare din perioada 2006-2011.

Cuprins

1 De ce apare o axă imaginară? 2
2 Forma algebrică și operațiile elementare 4
3 Conjugarea, modulul și împărțirea 4
4 Polinoame și necesitatea numerelor complexe 6
5 Planul complex și forma polară 7
6 Modulul și argumentul în operațiile algebrice 8
7 Cercul unitate, formula lui Moivre și rădăcinile unității 10
8 Exponențiala complexă și demonstrația completă a formulei lui Euler 12
9 Euler: definiție, formulă și mișcare geometrică 15
10 Șase deduceri trigonometrice prin calcul complex 18
11 Integrale reale rezolvate printr-un singur calcul complex 21
12 Oscilații, ecuații diferențiale și inginerie electrică 23
13 De ce numere complexe în mecanica cuantică? 26
14 Electromagnetismul și cercul fazelor: grupul $U(1)$ 28
15 Câteva rezultate surprinzătoare și utile 32
Referințe și lecturi suplimentare 35

1 De ce apare o axă imaginară?

1.1 Înmulțirea cu j: jumătate dintr-o întoarcere

Pe axa reală, înmulțirea cu -1 trimite a în $-a$: inversează semnul. Privită în plan, aceeași operație este o rotație de π radiani (180°) în jurul originii. Putem întreba: *există o operație care, aplicată de două ori, face această întoarcere?*

O rotație de $\pi/2$ (90°) are exact această proprietate. Vom vedea că ea este înmulțirea cu j:

$$a \xrightarrow{\times \mathrm{j}} \mathrm{j}a \xrightarrow{\times \mathrm{j}} -a, \qquad \mathrm{j}(\mathrm{j}a) = \mathrm{j}^2 a = -a.$$

Pentru $a > 0$, punctul intermediar nu se află pe axa reală, ci pe o axă perpendiculară pe aceasta. Astfel putem *intui* apariția axei imaginare.

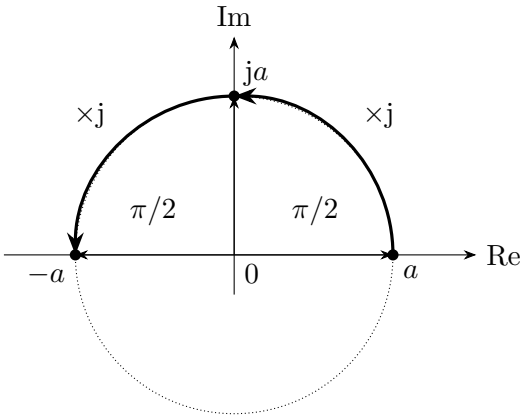


Figura 1: Două rotații de un sfert de tură dau o jumătate de tură. „Jumătate” se referă la unghiul rotației, nu la media aritmetică a punctelor.

Nu afirmăm că j **este la jumătatea segmentului dintre** 1 **și** -1**.** Mijlocul acelui segment este 0. Afirmația privește *compunerea operațiilor*: înmulțirea de două ori cu j este înmulțirea cu -1. Și $-\mathrm{j}$ are pătratul -1; înmulțirea cu $-\mathrm{j}$ produce un sfert de tură în sens orar. Convențional, înmulțirea cu j este rotația în sens trigonometric, adică în sens opus acelor de ceasornic.

Aceasta este o motivație geometrică, nu o demonstrație că o nouă mulțime de numere există. Construcția cu perechi de numere reale de mai jos oferă o definiție exactă.

1.2 În ce sens este $\mathbb{C}$ un fel de $\mathbb{R}^2$?

Putem construi mulțimea $\mathbb{C}$ din perechi $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Definim adunarea și înmulțirea prin

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d),\\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc).\end{aligned} \tag{1.1}$$

Identificăm 1 cu $(1, 0)$ și j cu $(0, 1)$. Atunci

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0), \qquad (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + \mathrm{j}b.$$

Așadar, relația $\mathrm{j}^2 = -1$ rezultă din regula de înmulțire; nu contrazice regulile numerelor reale.

Ca mulțime de puncte, ca spațiu vectorial real și ca plan euclidian, $\mathbb{C}$ **se identifică exact cu** $\mathbb{R}^2$**.** Adunarea, înmulțirea cu un scalar real și distanța sunt cele obișnuite din plan. Diferența este structura suplimentară: alegem înmulțirea (1.1), care transformă planul într-un corp de numere [2].

Această înmulțire *nu* este produsul pe componente $(a,b)(c,d) = (ac, bd)$ și nici produsul scalar $ac + bd$. De exemplu, produsul pe componente ar da $(0,1)^2 = (0,1)$, nu $(-1,0)$. În $\mathbb{C}$, fiecare număr nenul are invers; îl vom calcula explicit.

Peste $\mathbb{R}$, baza $\{1, \mathrm{j}\}$ arată că dimensiunea lui $\mathbb{C}$ este 2. Peste $\mathbb{C}$, baza $\{1\}$ arată că dimensiunea sa este 1. Nu este o contradicție: dimensiunea depinde de scalarii permiși.

Pe cercul unitate: un vector, două proiecții. Fie vectorii bazei canonice din $\mathbb{R}^2$,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Identificarea de mai sus înseamnă exact

$$1 \longleftrightarrow e_1, \qquad \mathrm{j} \longleftrightarrow e_2, \qquad a + \mathrm{j}b \longleftrightarrow ae_1 + be_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Dacă numărul complex se află pe cercul unitate și face un unghi x cu semiaxa reală pozitivă, coordonatele sale sunt $\cos x$ și $\sin x$. Aici x reprezintă *unghiul*, măsurat în radiani, nu abscisa punctului. Prin urmare,

$$\boxed{z(x) = \cos x + \mathrm{j} \sin x \quad \longleftrightarrow \quad v(x) = (\cos x)e_1 + (\sin x)e_2 = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.} \tag{1.2}$$

Lungimea vectorului este constantă, deoarece $\|v(x)\|_2^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Când crește x, vârful vectorului parcurge cercul în sens trigonometric:

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$z(x)$	1	j	-1	$-\mathrm{j}$
$v(x)$	e_1	e_2	$-e_1$	$-e_2$

Cosinusul și sinusul sunt cele două proiecții ale aceluiași vector unitar, nu două obiecte geometrice independente. Nu am folosit încă exponențiala complexă: aceasta este parametrizarea trigonometrică obișnuită a cercului. După demonstrarea formulei lui Euler vom putea scrie același număr ca $z(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}x}$. Pentru un semnal, alegerea $x = \omega t + \varphi$ va transforma unghiul în faza dependentă de timp.

1.3 Aceeași idee, scrisă cu matrice reale

Înmulțirea lui $x + \mathrm{j}y$ cu $z = a + \mathrm{j}b$ se scrie

$$z(x + \mathrm{j}y) = (ax - by) + \mathrm{j}(bx + ay).$$

Pe coordonate, aceasta este transformarea

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}_{M(z)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

În particular,

$$J := M(\mathrm{j}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad J^2 = -I_2.$$

Acesta este calculul exact care justifică rotația cu $\pi/2$. Prin înmulțire directă a matricelor se verifică

$$M(z + w) = M(z) + M(w), \qquad M(zw) = M(z)M(w).$$

Deci numerele complexe pot fi reprezentate prin matrice reale 2×2 de o formă specială. Nu orice matrice reală 2×2 are această formă: un număr complex are doar doi parametri reali, nu patru.

2 Forma algebrică și operațiile elementare

2.1 Definiție și notații

Notăm cu $\mathbb{R}$ mulțimea numerelor reale și cu $\mathbb{C}$ mulțimea numerelor complexe. Un număr complex are forma

$$z = a + \mathrm{j}b, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{j}^2 = -1. \tag{2.1}$$

Aceasta se numește *forma algebrică* a lui z. Numerele reale

$$\operatorname{Re} z = a, \qquad \operatorname{Im} z = b$$

sunt *partea reală*, respectiv *partea imaginară*. Partea imaginară este numărul real b, nu termenul $\mathrm{j}b$. Identificăm fiecare număr real a cu numărul complex $a + \mathrm{j}0$; astfel, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Două numere complexe sunt egale exact atunci când au aceleași părți reale și aceleași părți imaginare:

$$a + \mathrm{j}b = c + \mathrm{j}d \quad \Longleftrightarrow \quad a = c \text{ și } b = d.$$

2.2 Adunarea, scăderea și înmulțirea

Pentru $z = a + \mathrm{j}b$ și $w = c + \mathrm{j}d$, avem

$$z + w = (a + c) + \mathrm{j}(b + d), \tag{2.2}$$
$$z - w = (a - c) + \mathrm{j}(b - d), \tag{2.3}$$
$$zw = (ac - bd) + \mathrm{j}(ad + bc). \tag{2.4}$$

Formula produsului se obține prin desfacerea parantezelor și folosirea relației $\mathrm{j}^2 = -1$:

$$(a + \mathrm{j}b)(c + \mathrm{j}d) = ac + \mathrm{j}ad + \mathrm{j}bc + \mathrm{j}^2 bd = (ac - bd) + \mathrm{j}(ad + bc).$$

Adunarea și înmulțirea sunt comutative și asociative, iar înmulțirea este distributivă față de adunare. Elementele neutre sunt 0 și, respectiv, 1.

Exemplu 2.1. Dacă $z = 1 + 2\mathrm{j}$ și $w = 3 - \mathrm{j}$, atunci

$$z + w = 4 + \mathrm{j}, \qquad zw = (1 + 2\mathrm{j})(3 - \mathrm{j}) = 5 + 5\mathrm{j}.$$

Puterile lui j se repetă cu perioada 4:

$$\mathrm{j}^0 = 1, \qquad \mathrm{j}^1 = \mathrm{j}, \qquad \mathrm{j}^2 = -1, \qquad \mathrm{j}^3 = -\mathrm{j}, \qquad \mathrm{j}^4 = 1.$$

3 Conjugarea, modulul și împărțirea

3.1 Conjugatul unui număr complex

Definiție 3.1. Conjugatul lui $z = a + \mathrm{j}b$ este numărul

$$\overline{z} = a - \mathrm{j}b.$$

Se folosește și notația $z^* := \overline{z}$. Pentru un scalar, cele două notații înseamnă exact același lucru. În cazul matricelor, simbolul $*$ poate desemna conjugata transpusă, deci trebuie verificată convenția.

Prin urmare,

$$z + \overline{z} = 2a, \qquad z - \overline{z} = 2\mathrm{j}b, \qquad \operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{j}}. \tag{3.1}$$

În particular, $\overline{\overline{z}} = z$, iar $z \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\overline{z} = z$.

Propoziție 3.2. *Pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$,*

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Demonstrație. Scriem $z = a + \mathrm{j}b$ și $w = c + \mathrm{j}d$. Atunci

$$\overline{z+w} = (a+c) - \mathrm{j}(b+d) = (a - \mathrm{j}b) + (c - \mathrm{j}d).$$

De asemenea,

$$\overline{zw} = (ac - bd) - \mathrm{j}(ad + bc) = (a - \mathrm{j}b)(c - \mathrm{j}d) = \overline{z}\,\overline{w}. \qquad \square$$

3.2 Modulul

Definiție 3.3. Modulul numărului $z = a + \mathrm{j}b$ este numărul real nenegativ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{3.2}$$

În planul complex, $|z|$ reprezintă distanța de la origine la punctul (a, b). Se mai numește *magnitudine*; este aceeași normă euclidiană ca în $\mathbb{R}^2$. Nu trebuie confundat modulul $|z|$ cu pătratul său $|z|^2$, care va apărea, de exemplu, în calcule de energie și de probabilitate. Din definiție și din regula de înmulțire rezultă

$$z\overline{z} = zz^* = z^*z = (a + \mathrm{j}b)(a - \mathrm{j}b) = a^2 + b^2 = |z|^2. \tag{3.3}$$

Mai avem

$$|z| = 0 \iff z = 0, \qquad |\overline{z}| = |z|, \qquad |\operatorname{Re} z| \le |z|, \qquad |\operatorname{Im} z| \le |z|.$$

3.3 Inversul și împărțirea

Dacă $w \neq 0$, atunci $|w|^2 > 0$, iar

$$w\,\frac{\overline{w}}{|w|^2} = 1.$$

Așadar, orice număr complex nenul are inversul

$$w^{-1} = \frac{\overline{w}}{|w|^2}. \tag{3.4}$$

Pentru $z = a + \mathrm{j}b$ și $w = c + \mathrm{j}d \neq 0$, obținem

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{(a+\mathrm{j}b)(c-\mathrm{j}d)}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \mathrm{j}\frac{bc-ad}{c^2+d^2}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Împărțirea la zero nu este definită.

Conjugarea este compatibilă și cu împărțirea:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, \qquad w \neq 0. \tag{3.6}$$

Într-adevăr, conjugând egalitatea $w(z/w) = z$, rezultă $\overline{w}\,\overline{(z/w)} = \overline{z}$, de unde formula.

Exemplu 3.4.

$$\frac{1+2\mathrm{j}}{3-\mathrm{j}} = \frac{(1+2\mathrm{j})(3+\mathrm{j})}{10} = \frac{1+7\mathrm{j}}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}\mathrm{j}.$$

4 Polinoame și necesitatea numerelor complexe

4.1 Un exemplu introductiv

Ecuația $x^2 + 1 = 0$ nu are soluții în $\mathbb{R}$, dar are soluțiile j și $-$j în $\mathbb{C}$. Un alt exemplu este polinomul

$$p(z) = z^3 + 2z^2 + 2z + 1.$$

Observăm că $p(-1) = 0$ și factorizăm:

$$p(z) = (z + 1)(z^2 + z + 1).$$

Celelalte rădăcini satisfac

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}.$$

Prin urmare, toate cele trei rădăcini sunt

$$z_1 = -1, \qquad z_2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z_3 = -\frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{4.1}$$

4.2 Teorema fundamentală a algebrei

Teoremă 4.1 (Teorema fundamentală a algebrei)**.** *Fie*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \qquad a_k \in \mathbb{C}, \quad n \geq 1, \quad a_n \neq 0.$$

Există $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{C}$ *astfel încât*

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - \gamma_k). \tag{4.2}$$

Rădăcinile pot fi repetate. Așadar, un polinom de grad n are exact n rădăcini complexe, numărate cu multiplicitate.

Acest rezultat este enunțat aici fără demonstrație. Condiția $a_n \neq 0$ este necesară pentru ca gradul polinomului să fie n.

4.3 Polinoame cu coeficienți reali

Propoziție 4.2. *Dacă p are coeficienți reali și* $\gamma \in \mathbb{C}$ *este o rădăcină a sa, atunci și* $\overline{\gamma}$ *este rădăcină, cu aceeași multiplicitate.*

Demonstrație. Deoarece $\overline{a_k} = a_k$, proprietățile conjugării dau

$$p(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^{\,k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_j z^k} = \overline{p(z)}.$$

Dacă $p(\gamma) = 0$, atunci $p(\overline{\gamma}) = \overline{0} = 0$.

Pentru multiplicitate, scriem $p(z) = (z - \gamma)^m q(z)$, unde $q(\gamma) \neq 0$. Dacă $q(z) = \sum_k c_j z^k$, notăm $\widetilde{q}(z) = \sum_k \overline{c_k} z^k$. Conjugând identitatea de mai sus evaluată în $\overline{z}$, obținem

$$p(z) = (z - \overline{\gamma})^m \widetilde{q}(z), \qquad \widetilde{q}(\overline{\gamma}) = \overline{q(\gamma)} \neq 0.$$

Rezultă că multiplicitatea lui $\overline{\gamma}$ este tot m. □

O pereche de rădăcini nereale conjugate, $\gamma = u + \mathrm{j}v$ și $\overline{\gamma} = u - \mathrm{j}v$, cu $v \neq 0$, produce un factor de gradul doi cu coeficienți reali:

$$\begin{aligned}(z-\gamma)(z-\overline{\gamma}) &= z^2 - (\gamma+\overline{\gamma})z + \gamma\overline{\gamma} \\ &= z^2 - 2uz + (u^2+v^2).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Discriminantul acestui factor este $-4v^2 < 0$; el nu se mai descompune în factori liniari cu coeficienți reali.

În consecință, orice polinom cu coeficienți reali, de grad $n \geq 1$, admite o factorizare de forma

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^{r} (z-\alpha_k) \prod_{k=1}^{s} (z^2 + b_j z + c_k), \qquad r + 2s = n, \tag{4.4}$$

unde $\alpha_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ și $b_k^2 - 4c_k < 0$. Numerele r, s pot fi zero; un produs fără factori este egal cu 1. Rădăcinile și factorii sunt numărați cu multiplicitate.

5 Planul complex și forma polară

5.1 Interpretarea geometrică

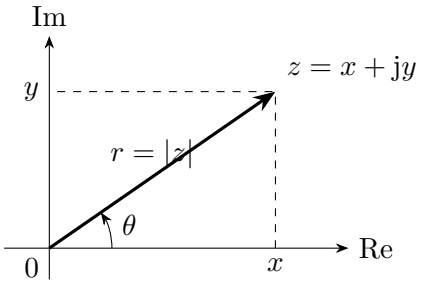
Numărul $z = x + \mathrm{j}y$ se reprezintă prin punctul (x, y) din plan. Axa orizontală este axa reală, iar axa verticală este axa imaginară. Conjugarea reflectă punctul față de axa reală, iar adunarea corespunde adunării vectorilor din plan.

Dacă $z \neq 0$, notăm $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} > 0$. Un unghi $\theta \in \mathbb{R}$ este un *argument* al lui z dacă

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta. \tag{5.1}$$

Obținem *forma polară*, numită și *forma trigonometrică*:

$$\boxed{z = r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta).} \tag{5.2}$$



Numărul 0 are modulul 0, dar **nu are argument definit**: originea nu determină o direcție.

5.2 Argumentul și argumentul principal

Argumentul nu este unic. Dacă θ este un argument al lui $z \neq 0$, atunci toate argumentele sale sunt

$$\theta + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Această neunicitate provine din periodicitatea sinusului și cosinusului:

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta, \qquad \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta.$$

În aceste note alegem convenția

$$\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi). \tag{5.3}$$

Numărul $\operatorname{Arg} z$ este *argumentul principal*, adică unicul argument din acest interval. Mulțimea tuturor argumentelor poate fi notată

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

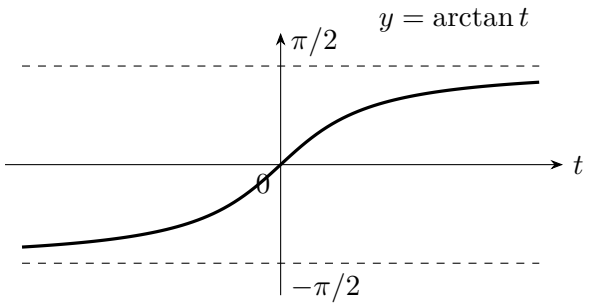
Intervalul este semiînchis: 0 și 2π descriu aceeași direcție și nu pot fi amândouă valori principale. O altă convenție frecventă este $(-\pi, \pi]$; formulele trebuie interpretate în acord cu convenția aleasă.

5.3 De ce formula cu arctangenta necesită atenție

Pentru $x \neq 0$, relația $\tan\theta = y/x$ nu determină singură cadranul. Funcția arctan are valori în $(-\pi/2, \pi/2)$, în timp ce un număr complex poate avea orice direcție în plan. În convenția (5.3), formula completă este

$$\operatorname{Arg}(x + \mathrm{j}y) = \begin{cases} \arctan(y/x), & x > 0,\ y \geq 0, \\ \arctan(y/x) + 2\pi, & x > 0,\ y < 0, \\ \arctan(y/x) + \pi, & x < 0, \\ \pi/2, & x = 0,\ y > 0, \\ 3\pi/2, & x = 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Cazul $x = y = 0$ este exclus.



Exemplu 5.1. Pentru $z = -1 + \mathrm{j}$, avem $|z| = \sqrt{2}$ și $\arctan(y/x) = \arctan(-1) = -\pi/4$. Acest unghi indică însă cadranul al patrulea, în timp ce z este în cadranul al doilea. Corect este

$$\operatorname{Arg}(-1 + \mathrm{j}) = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}, \qquad -1 + \mathrm{j} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Periodicitatea privește unghiurile din sinus și cosinus, nu funcția arctan. În general, $\arctan(t+2k\pi) \neq \arctan t$.

6 Modulul și argumentul în operațiile algebrice

6.1 Modulul produsului și al câtului

Propoziție 6.1. *Pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$,*

$$|zw| = |z|\,|w|. \tag{6.1}$$

Dacă $w \neq 0$, atunci

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}. \tag{6.2}$$

Demonstrație. Din proprietățile conjugării și din (3.3),

$$|zw|^2 = (zw)\overline{zw} = z\overline{z}\,w\overline{w} = |z|^2|w|^2.$$

Luând rădăcinile pătrate nenegative obținem prima formulă. Pentru a doua, aplicăm prima formulă egalității $z = (z/w)w$:

$$|z| = \left|\frac{z}{w}\right| |w|,$$

iar $|w| > 0$ permite împărțirea. □

6.2 Argumentul produsului, al câtului și al conjugatului

Fie $z, w \neq 0$ și scriem

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta), \qquad w = s(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi).$$

Folosind formulele trigonometrice pentru suma unghiurilor,

$$\begin{aligned} zw &= rs\big[\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi + \mathrm{j}(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)\big] \\ &= rs\big(\cos(\theta+\varphi) + \mathrm{j}\sin(\theta+\varphi)\big). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Analog, deoarece $w^{-1} = s^{-1}(\cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi)$,

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}\big(\cos(\theta-\varphi) + \mathrm{j}\sin(\theta-\varphi)\big). \tag{6.4}$$

La înmulțire, modulele se înmulțesc, iar argumentele se adună. La împărțire, modulele se împart, iar argumentele se scad. Pentru argumentele principale, relațiile corecte sunt congruențe:

$$\operatorname{Arg}(zw) \equiv \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \pmod{2\pi}, \tag{6.5}$$

$$\operatorname{Arg}(z/w) \equiv \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} w \pmod{2\pi}. \tag{6.6}$$

Notația $\alpha \equiv \beta \pmod{2\pi}$ înseamnă că $\alpha - \beta = 2k\pi$ pentru un întreg k. Suma sau diferența se reduce apoi în intervalul $[0, 2\pi)$.

Pentru conjugat,

$$\overline{z} = r(\cos\theta - \mathrm{j}\sin\theta) = r\big(\cos(-\theta) + \mathrm{j}\sin(-\theta)\big),$$

deci

$$|\overline{z}| = |z|, \qquad \operatorname{Arg}(\overline{z}) \equiv -\operatorname{Arg} z \pmod{2\pi}. \tag{6.7}$$

În convenția noastră, $\operatorname{Arg}(\overline{z}) = 0$ dacă $\operatorname{Arg} z = 0$, iar în caz contrar $\operatorname{Arg}(\overline{z}) = 2\pi - \operatorname{Arg} z$.

Exemplu 6.2. Avem $\operatorname{Arg}(-1) = \pi$, dar $\operatorname{Arg}((-1)(-1)) = \operatorname{Arg}(1) = 0$. Prin urmare, egalitatea obișnuită $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$ nu este întotdeauna adevărată: în acest exemplu suma este 2π, care se reduce la 0.

6.3 Inegalitatea triunghiului

Propoziție 6.3 (Inegalitatea triunghiului)**.** *Pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$,*

$$\boxed{|z+w| \leq |z| + |w|.} \tag{6.8}$$

Demonstrație. Dezvoltăm pătratul modulului:

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w})\\ &= |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w\\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}).\end{aligned}$$

Pentru orice $u \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} u \le |u|$. Astfel,

$$\operatorname{Re}(z\overline{w}) \le |z\overline{w}| = |z|\,|w|,$$

iar

$$|z+w|^2 \le |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\,|w| = (|z| + |w|)^2.$$

Ambele membre ale inegalității dorite sunt nenegative, deci putem lua rădăcina pătrată. □

Geometric, lungimea sumei a doi vectori nu depășește suma lungimilor lor. Egalitatea se obține când unul dintre numere este zero sau când cele două numere nenule au aceeași direcție: $z = tw$ pentru un $t > 0$. Într-adevăr, egalitatea în demonstrație cere ca $z\overline{w}$ să fie real nenegativ.

Ca o consecință, avem și *inegalitatea triunghiului inversă*:

$$\big||z| - |w|\big| \le |z - w|. \tag{6.9}$$

Din $z = (z-w) + w$ rezultă $|z| - |w| \le |z-w|$; inversând rolurile lui z și w obținem cealaltă inegalitate necesară.

7 Cercul unitate, formula lui Moivre și rădăcinile unității

7.1 Cercul unitate

Definiție 7.1. Cercul unitate este mulțimea

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Dacă $z \in S^1$, atunci

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \overline{z} \in S^1. \tag{7.1}$$

Dacă $z, w \in S^1$, atunci $|zw| = |z||w| = 1$, deci $zw \in S^1$. În consecință, S^1 este un grup față de înmulțire. Geometric, înmulțirea cu un număr de modul 1 este o rotație în jurul originii, cu unghiul dat de un argument al acelui număr.

7.2 Formula lui Moivre

Teoremă 7.2 (Formula lui Moivre)**.** *Pentru orice $\theta \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\boxed{(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{j}\sin(n\theta).} \tag{7.2}$$

Demonstrație. Pentru $n = 0$, ambele membre sunt 1. Pentru $n = 1$, identitatea este imediată. Presupunând că formula este adevărată pentru un întreg $n \ge 1$, înmulțim cu $\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$ și aplicăm (6.3):

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)^{n+1} &= \big(\cos(n\theta) + \mathrm{j}\sin(n\theta)\big)(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)\\ &= \cos((n+1)\theta) + \mathrm{j}\sin((n+1)\theta).\end{aligned}$$

Prin inducție, formula este adevărată pentru orice $n \geq 0$.

Dacă $n = -m < 0$, folosim faptul că inversul unui număr de pe cercul unitate este conjugatul său:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)^{-m} &= (\cos\theta - \mathrm{j}\sin\theta)^m \\ &= (\cos(-\theta) + \mathrm{j}\sin(-\theta))^m \\ &= \cos(-m\theta) + \mathrm{j}\sin(-m\theta).\end{aligned}$$

Aceasta este formula dorită pentru $n = -m$. □

Pentru un număr complex nenul $z = r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$ rezultă, mai general,

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + \mathrm{j}\sin(n\theta)), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{7.3}$$

În particular, $|z^n| = |z|^n$, iar $\operatorname{Arg}(z^n) \equiv n \operatorname{Arg} z \pmod{2\pi}$. Puterile cu exponent negativ necesită $z \neq 0$.

Exemplu 7.3. Deoarece $1 + \mathrm{j} = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{j}\sin(\pi/4))$,

$$(1+\mathrm{j})^8 = (\sqrt{2})^8(\cos(2\pi) + \mathrm{j}\sin(2\pi)) = 16.$$

7.3 Rădăcinile de ordin n ale unității

Definiție 7.4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Un număr $z \in \mathbb{C}$ se numește *rădăcină de ordin n a unității* dacă $z^n = 1$.

Propoziție 7.5. *Ecuația $z^n = 1$ are exact n soluții distincte:*

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{j}\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{7.4}$$

Demonstrație. Dacă $z^n = 1$, atunci $z \neq 0$ și $|z|^n = |z^n| = 1$. Cum $|z| > 0$, rezultă $|z| = 1$. Scriem $z = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$ și aplicăm formula lui Moivre:

$$z^n = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(n\theta) = 1 \text{ și } \sin(n\theta) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n\theta = 2k\pi$$

pentru un $k \in \mathbb{Z}$. Prin urmare, $\theta = 2k\pi/n$. Reciproc, fiecare număr din (7.4) are puterea n egală cu 1.

Dacă $z_k = z_\ell$, unghiurile diferă printr-un multiplu întreg de 2π:

$$\frac{2(k-\ell)\pi}{n} \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad k - \ell \in n\mathbb{Z}.$$

Pentru $0 \leq k, \ell \leq n-1$, acest lucru impune $k = \ell$. Orice alt întreg k dă una dintre aceleași valori, prin reducerea sa modulo n. Așadar, soluțiile enumerate sunt distincte și complete. □

Geometric, pentru $n \geq 3$, aceste rădăcini sunt vârfurile unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul unitate, unul dintre vârfuri fiind 1. De exemplu,

n	rădăcinile de ordin n ale unității
2	$1,\ -1$
3	$1,\ -\frac{1}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$
4	$1,\ \mathrm{j},\ -1,\ -\mathrm{j}$

Observație. Terminologia „de ordin n” se referă aici la ecuația $z^n = 1$; nu înseamnă că n este cel mai mic exponent pozitiv cu această proprietate. De exemplu, 1 este o rădăcină a unității pentru orice n.

8 Exponențiala complexă și demonstrația completă a formulei lui Euler

Vom defini exponențiala pe $\mathbb{C}$ printr-o serie absolut convergentă și vom demonstra legea exponențială fără a folosi formula lui Euler. Apoi vom obține seriile sinusului și cosinusului din formula Taylor cu rest și vom identifica părțile reală și imaginară. Folosim rezultate de analiză reală despre derivate și formula Taylor, dar nu presupunem identitatea pe care urmează să o demonstrăm.

8.1 Un fapt preliminar despre factorial

Lemă 8.1. *Pentru orice număr real $t \geq 0$,*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{t^m}{m!} = 0, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} < \infty.$$

Aici $0! = 1$, iar termenul cu $m = 0$ al seriei este 1.

Demonstrație. Pentru $t = 0$, afirmațiile sunt imediate. Pentru $t > 0$, notăm $a_m = t^m/m!$ și observăm că

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{t}{m+1}.$$

Alegem un întreg M suficient de mare încât $t/(M+1) \leq 1/2$. Atunci $a_{m+1} \leq a_m/2$ pentru orice $m \geq M$, deci

$$a_{M+k} \leq a_M\, 2^{-k}, \qquad k \geq 0.$$

Rezultă atât $a_m \to 0$, cât și convergența seriei, deoarece coada sa este majorată de seria geometrică $a_M \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$. □

8.2 Definirea exponențialei complexe

Definiție 8.2 (Exponențiala complexă)**.** Pentru orice $z \in \mathbb{C}$, definim

$$\mathrm{e}^z := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots. \tag{8.1}$$

Seria este absolut convergentă, deoarece

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left|\frac{z^m}{m!}\right| = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^m}{m!} < \infty$$

prin Lema 8.1. În particular, definiția are sens și pentru $z = \mathrm{j}x$.

Compatibilitatea cu exponențiala reală. Pentru $x \in \mathbb{R}$, formula Taylor aplicată exponențialei reale în jurul lui 0 dă

$$\exp(x) = \sum_{m=0}^{N} \frac{x^m}{m!} + R_N(x), \qquad |R_N(x)| \leq \mathrm{e}^{|x|} \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

În această estimare, $\mathrm{e}^{|x|}$ este exponențiala reală obișnuită; majorarea rezultă deoarece toate derivatele lui exp sunt exp, iar punctul intermediar din restul Taylor se află între 0 și x. Lema 8.1 arată că $R_N(x) \to 0$. Așadar, definiția (8.1) coincide pe $\mathbb{R}$ cu exponențiala reală: este o extensie a acesteia, nu o funcție diferită pe axa reală.

8.3 Legea exponențială pentru argumente complexe

Propoziție 8.3. *Pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$,*

$$e^{z+w} = e^z e^w. \tag{8.2}$$

Demonstrație. Seriile care definesc e^z și e^w sunt absolut convergente. Mai mult,

$$\sum_{p,q\geq 0} \frac{|z|^p |w|^q}{p!q!} = \left(\sum_{p\geq 0} \frac{|z|^p}{p!}\right)\left(\sum_{q\geq 0} \frac{|w|^q}{q!}\right) < \infty.$$

Putem deci înmulți seriile și grupa termenii după $m = p + q$. Formula binomului dă

$$\begin{aligned} e^z e^w &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k w^{m-k}}{k!(m-k)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} z^k w^{m-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z+w)^m}{m!} = e^{z+w}. \end{aligned}$$

□

În particular, $e^z e^{-z} = e^0 = 1$, deci exponențiala complexă nu se anulează.

8.4 Seriile sinusului și cosinusului, cu justificarea restului

Formula Taylor de ordin M în jurul lui 0 este

$$f(x) = \sum_{k=0}^{M} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(M+1)}(\xi)}{(M+1)!} x^{M+1}, \tag{8.3}$$

unde, pentru $x \neq 0$, ξ se află între 0 și x. La $x = 0$, formula este imediată și restul este zero. Vom folosi această teoremă de analiză reală pentru $f = \cos$ și $f = \sin$.

Derivatele cosinusului se repetă ciclic:

$$\cos x, \quad -\sin x, \quad -\cos x, \quad \sin x, \quad \cos x, \ldots$$

Prin urmare,

$$\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k, \qquad \cos^{(2k+1)}(0) = 0.$$

Cu $M = 2N + 1$ în (8.3), rezultă

$$\cos x = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{c,N}(x), \qquad |R_{c,N}(x)| \leq \frac{|x|^{2N+2}}{(2N+2)!}. \tag{8.4}$$

Majorarea este valabilă deoarece fiecare derivată a cosinusului este una dintre funcțiile $\pm\sin$ și $\pm\cos$, toate având modulul cel mult 1.

În mod analog, derivatele sinusului sunt

$$\sin x, \quad \cos x, \quad -\sin x, \quad -\cos x, \quad \sin x, \ldots,$$

deci

$$\sin^{(2k)}(0) = 0, \qquad \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

Aplicând din nou (8.3) cu $M = 2N + 1$, obținem

$$\sin x = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{s,N}(x), \qquad |R_{s,N}(x)| \le \frac{|x|^{2N+2}}{(2N+2)!}. \tag{8.5}$$

Pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$ fixat, Lema 8.1 implică $R_{c,N}(x) \to 0$ și $R_{s,N}(x) \to 0$. Astfel, nu avem doar dezvoltări formale, ci egalități valabile pentru orice $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \tag{8.6}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots. \tag{8.7}$$

Ambele serii sunt și absolut convergente: sumele modulelor sunt subserii ale seriei convergente $\sum_{m \ge 0} |x|^m / m!$.

8.5 Formula lui Euler și demonstrația ei

Teoremă 8.4 (Formula lui Euler)**.** *Pentru orice număr real x,*

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j} \sin x.} \tag{8.8}$$

Demonstrația Teoremei 8.4. Fixăm $x \in \mathbb{R}$. Din $\mathrm{j}^2 = -1$ rezultă

$$\mathrm{j}^{2k} = (-1)^k, \qquad \mathrm{j}^{2k+1} = \mathrm{j}(-1)^k.$$

Pentru fiecare $N \ge 0$, separăm termenii cu indice par și impar într-o sumă *finită*:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{2N+1} \frac{(\mathrm{j}x)^m}{m!} &= \sum_{k=0}^{N} \frac{(\mathrm{j}x)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{(\mathrm{j}x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{j} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Când $N \to \infty$, membrul stâng converge la $\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}$ prin definiția (8.1); este un subșir al șirului convergent al sumelor parțiale. Prima sumă din membrul drept converge la $\cos x$, iar a doua la $\sin x$, prin (8.6) și (8.7). Trecând la limită, obținem

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j} \sin x.$$

Această trecere la limită este legitimă în $\mathbb{C}$: pentru $a_N \to a$ și $b_N \to b$ în $\mathbb{R}$, avem $|(a_N + \mathrm{j}b_N) - (a + \mathrm{j}b)| \le |a_N - a| + |b_N - b| \to 0$. Cum x a fost arbitrar, formula este demonstrată pentru orice $x \in \mathbb{R}$. □

Observație. Demonstrația nu se bazează pe o rearanjare nejustificată a unei serii. Am separat mai întâi termenii în sume finite și abia apoi am trecut la limită. Convergența absolută ar fi permis și separarea directă a seriei infinite în termenii pari și impari.

9 Euler: definiție, formulă și mișcare geometrică

9.1 Două construcții echivalente

În secțiunea precedentă am ales ordinea logică

$$\underbrace{\mathrm{e}^{z} := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}}_{\text{definiție}} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x}_{\text{teoremă demonstrată}}.$$

În această construcție, formula lui Euler exprimă o proprietate a unei funcții deja definite. Nu o definim prin trigonometrie și apoi nu pretindem că am demonstrat definiția.

Se poate porni și în sens invers. Am putea introduce mai întâi funcția

$$E(x) := \cos x + \mathrm{j}\sin x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

și apoi defini o funcție pe tot planul complex prin

$$F(a + \mathrm{j}b) := \mathrm{e}^{a} E(b) = \mathrm{e}^{a}(\cos b + \mathrm{j}\sin b), \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

unde e^{a} este exponențiala reală deja cunoscută. Aceasta este o construcție legitimă, folosită și în unele cursuri introductive [3]. În acest caz, egalitatea $F(\mathrm{j}x) = \cos x + \mathrm{j}\sin x$ este adevărată *prin definiție*.

Totuși, faptul că o numim „exponențială” nu îi garantează automat proprietățile. Trebuie verificat că satisface legea produsului, regula de derivare și că se potrivește cu exponențiala reală. Demonstrația prin serii din secțiunea precedentă, împreună cu legea $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{w}$, arată chiar că

$$F(a + \mathrm{j}b) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a + \mathrm{j}b)^m}{m!} \qquad \text{pentru orice } a, b \in \mathbb{R}.$$

Cele două construcții dau aceeași funcție pe întregul plan complex. Aceasta este echivalența importantă; nu doar faptul că dau aceeași valoare în câteva puncte.

9.2 De ce merită să calculăm valoarea în zero din definiție?

Dacă pornim de la definiția trigonometrică, verificarea directă este

$$E(0) = \cos 0 + \mathrm{j}\sin 0 = 1.$$

Dacă pornim de la seria exponențialei, obținem, tot direct,

$$\mathrm{e}^{0} = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}0} = \mathrm{e}^{0} = 1.$$

Nici al doilea calcul nu este greșit: $\mathrm{j}0 = 0$**.** Ideea pedagogică este să nu atribuim unei funcții noi proprietățile exponențialei doar pentru că am ales să folosim simbolul e. După ce definițiile sunt puse în acord, ambele calcule sunt valide.

Acordul numai în $x = 0$ nu ar demonstra echivalența. De exemplu, $\cos(2x) + \mathrm{j}\sin(2x)$ este tot 1 în zero, dar descrie o rotație de două ori mai rapidă. Mai mult, simpla lege a produsului nu fixează viteza rotației: și $\mathrm{e}^{\mathrm{j}cx}$ o satisface pentru orice $c \in \mathbb{R}$. Condiția de derivare $E'(0) = \mathrm{j}$ fixează scara unghiului.

9.3 Cum folosim egalitatea în ambele sensuri?

Odată demonstrată formula lui Euler, putem trece liber între scrierea exponențială și cea trigonometrică. De exemplu, calculăm același produs în două feluri:

$$e^{ja}e^{jb} = e^{j(a+b)} \quad \text{și} \quad (\cos a + j\sin a)(\cos b + j\sin b).$$

Compararea părților reale și imaginare produce două identități trigonometrice simultan.

Aici există o precizare logică utilă. Dacă am demonstra legea produsului *numai* folosind formulele trigonometrice de adunare, apoi am folosi legea produsului pentru a „demonstra" aceleași formule, am face un cerc. În aceste note, legea exponențială a fost demonstrată separat, din serii și din formula binomului. Deducerile din secțiunea următoare sunt astfel justificate; în plus, ele arată cum se pot reconstrui formulele fără a le memora separat.

9.4 Forma exponențială: modul și unghi

Pentru $z \neq 0$, forma polară și formula lui Euler dau

$$\boxed{z = re^{j\theta}, \qquad r = |z| > 0, \quad \theta \in \arg z.} \tag{9.1}$$

Rezultă

$$|e^{j\theta}| = 1, \qquad \overline{e^{j\theta}} = e^{-j\theta}, \qquad e^{j(\theta+2k\pi)} = e^{j\theta} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, legea exponențială oferă și identitatea

$$e^{a+jb} = e^a(\cos b + j\sin b), \qquad |e^{a+jb}| = e^a. \tag{9.2}$$

Partea reală a a exponentului controlează modulul; partea imaginară b controlează unghiul. Pentru $z = 0$ putem scrie $0 = 0e^{j\theta}$ pentru orice θ, dar această scriere nu definește un argument al lui 0.

Dacă $z = re^{j\theta}$ și $w = se^{j\varphi}$ sunt nenule, avem

$$zw = rse^{j(\theta+\varphi)}, \qquad \frac{z}{w} = \frac{r}{s}e^{j(\theta-\varphi)}, \tag{9.3}$$

$$\overline{z} = re^{-j\theta}, \qquad z^{-1} = r^{-1}e^{-j\theta}, \tag{9.4}$$

$$z^n = r^n e^{jn\theta} \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{9.5}$$

Acestea sunt formulele algebrice și geometrice deja cunoscute, reunite într-o notație compactă.

9.5 Identitatea $e^{j\pi} + 1 = 0$: două operații diferite

Din formula lui Euler,

$$e^{j\pi} = \cos\pi + j\sin\pi = -1, \qquad \boxed{e^{j\pi} + 1 = 0.}$$

Geometric, urmărim *două operații succesive*. Punctul de plecare este 1, deoarece putem face explicit factorul 1 din $1 \cdot e^{j\pi}$:

$$\boxed{1 \xrightarrow{\times e^{j\pi}} -1 \xrightarrow{+1} 0.} \tag{9.6}$$

Prima operație este o rotație de π în jurul originii. Pentru a o vizualiza continuu, variem unghiul de la 0 la π pe traiectoria $\gamma(\theta) = e^{j\theta}$. A doua operație este o translație cu vectorul real 1, adică un pas de lungime 1 spre dreapta, din -1 până la origine.

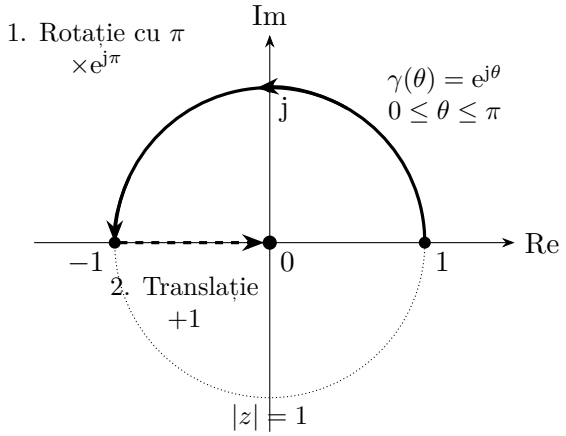


Figura 2: Pornim din 1, parcurgem semicercul superior până la -1, apoi adăugăm 1 și ajungem în 0. Săgeata întreruptă este translația, nu o continuare a rotației.

Înmulțirea și adunarea nu trebuie confundate. O rotație cu centrul în origine nu poate trimite un punct de pe cercul unitate în origine, deoarece îi păstrează modulul. Ultimul pas din (9.6) este tocmai cel care schimbă modulul de la 1 la 0. Formula descrie rezultatul algebric; traseul desenat este o vizualizare naturală a operațiilor, nu o informație suplimentară impusă de egalitate.

9.6 Un sfert de tură: $e^{j\pi/2} - j = 0$

Exact aceeași idee funcționează pentru

$$e^{j\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = j, \qquad \boxed{e^{j\pi/2} - j = 0.}$$

De această dată,

$$1 \xrightarrow{\times e^{j\pi/2}} j \xrightarrow{-j} 0.$$

Mai întâi rotim cu $\pi/2$, apoi coborâm o unitate pe axa imaginară.

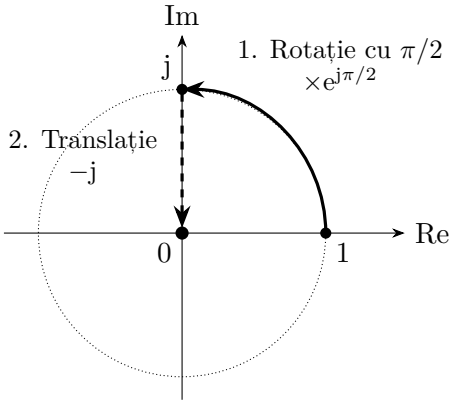


Figura 3: O rotație de un sfert de tură trimite 1 în j. Adunarea vectorului $-j$ trimite apoi j în origine.

Alte identități citite imediat de pe cerc sunt

$$e^{0j} - 1 = 0, \qquad e^{3\pi j/2} + j = 0, \qquad e^{2\pi j} - 1 = 0.$$

În general,

$$e^{j\theta} - \cos\theta - j\sin\theta = 0.$$

Pornim din 1, rotim cu θ și apoi translatăm cu vectorul opus punctului obținut. Identitatea cu π este un caz deosebit de compact, în care apar împreună $e, j, \pi, 1$ și 0.

10 Șase deduceri trigonometrice prin calcul complex

Metoda este aceeași de fiecare dată: scriem o identitate algebrică pentru exponențiale, folosim formula lui Euler și comparăm părțile reală și imaginară. Primele două exemple dezvoltă formulele de adunare și de înjumătățire a unghiului; următoarele patru arată alte utilizări frecvente.

Vom folosi și formele inverse ale formulei lui Euler. Din

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x, \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x} = \cos x - \mathrm{j}\sin x,$$

prin adunare și scădere obținem

$$\boxed{\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2}, \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}.} \tag{10.1}$$

Acestea sunt egalități între numere complexe, ale căror rezultate sunt reale. Nu trebuie confundate cu egalitatea falsă $\cos x = \mathrm{e}^{\mathrm{j}x}$.

10.1 Exemplul 1: suma și diferența a două unghiuri

Legea exponențială dă

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(a+b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}a}\mathrm{e}^{\mathrm{j}b}.$$

Dezvoltăm ambele părți:

$$\begin{aligned}\cos(a+b) + \mathrm{j}\sin(a+b) &= (\cos a + \mathrm{j}\sin a)(\cos b + \mathrm{j}\sin b)\\ &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\\ &\quad + \mathrm{j}(\sin a\cos b + \cos a\sin b).\end{aligned}$$

Egalitatea părților reale și imaginare produce simultan

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b,} \tag{10.2}$$

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b.} \tag{10.3}$$

Înlocuind b cu $-b$ și folosind paritatea cosinusului, respectiv imparitatea sinusului, rezultă

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b, \tag{10.4}$$

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b. \tag{10.5}$$

Un singur produs complex reține, așadar, două formule reale.

10.2 Exemplul 2: unghiul dublu și unghiul pe jumătate

Pornim de la

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{j}x} = (\mathrm{e}^{\mathrm{j}x})^2 = (\cos x + \mathrm{j}\sin x)^2.$$

Membrul drept este

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2\mathrm{j}\sin x\cos x,$$

deci

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad \sin 2x = 2\sin x\cos x.} \tag{10.6}$$

Pentru *unghiul pe jumătate*, egalitatea de pornire este

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = (\mathrm{e}^{\mathrm{j}x/2})^2 = \left(\cos\frac{x}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{x}{2}\right)^2.$$

Observați că în ultima paranteză apare $x/2$, nu x. Compararea părților dă

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}, \qquad \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}.$$

Împreună cu $\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2) = 1$, acestea implică

$$\boxed{\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}, \qquad \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}.} \tag{10.7}$$

Dacă extragem rădăcini pătrate,

$$\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \qquad \sin \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}.$$

Semnul se alege după cadranul unghiului $x/2$; nu este întotdeauna pozitiv. De exemplu, pentru $x = -\pi/2$, sinusul unghiului $x/2 = -\pi/4$ este $-\sqrt{2}/2$.

Prin împărțire obținem și formula utilă

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \tag{10.8}$$

ori de câte ori expresiile respective sunt definite. Prima fracție cere $1 + \cos x \neq 0$, iar a doua cere $\sin x \neq 0$.

10.3 Exemplul 3: transformarea sumelor în produse

Factorizăm suma a două exponențiale în jurul unghiului mediu:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{j}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}b} &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}(a+b)/2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(a-b)/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(a-b)/2} \right) \\ &= 2 \cos \frac{a-b}{2} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(a+b)/2}. \end{aligned}$$

Luând părțile reală și imaginară,

$$\boxed{\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},} \tag{10.9}$$

$$\boxed{\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.} \tag{10.10}$$

Pentru diferență procedăm la fel:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}a} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}b} = 2\mathrm{j} \sin \frac{a-b}{2} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(a+b)/2}.$$

Înmulțirea cu j schimbă $\cos u + \mathrm{j} \sin u$ în $-\sin u + \mathrm{j} \cos u$. Prin urmare,

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}, \tag{10.11}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}. \tag{10.12}$$

Aceste formule sunt utile pentru simplificări și pentru interpretarea sumei unor oscilații cu frecvențe apropiate.

10.4 Exemplul 4: transformarea produselor în sume

Folosim (10.1) și dezvoltăm:

$$\begin{aligned}\cos a\cos b &= \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}a}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}a})(\mathrm{e}^{\mathrm{j}b}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}b})\\ &= \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(a+b)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(a+b)}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}(a-b)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(a-b)}\right].\end{aligned}$$

Grupând exponențialele conjugate,

$$\boxed{\cos a\cos b = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}.} \tag{10.13}$$

În mod analog,

$$\begin{aligned}\sin a\sin b &= -\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}a}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}a})(\mathrm{e}^{\mathrm{j}b}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}b}),\\ \sin a\cos b &= \frac{1}{4\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}a}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}a})(\mathrm{e}^{\mathrm{j}b}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}b}).\end{aligned}$$

După dezvoltare și grupare rezultă

$$\boxed{\sin a\sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2},} \tag{10.14}$$

$$\boxed{\sin a\cos b = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}.} \tag{10.15}$$

Schimbând a cu b în ultima formulă obținem și

$$\cos a\sin b = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}.$$

De exemplu,

$$\int \cos(2x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(\cos x+\cos 5x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+C.$$

10.5 Exemplul 5: unghiul triplu și reducerea cuburilor

Din $\mathrm{e}^{3\mathrm{j}x} = (\mathrm{e}^{\mathrm{j}x})^3$, formula binomului dă

$$\begin{aligned}(\cos x+\mathrm{j}\sin x)^3 &= \cos^3 x-3\cos x\sin^2 x\\ &\quad +\mathrm{j}(3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x).\end{aligned}$$

Comparăm cu $\cos 3x+\mathrm{j}\sin 3x$ și folosim $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$:

$$\boxed{\cos 3x = 4\cos^3 x-3\cos x, \qquad \sin 3x = 3\sin x-4\sin^3 x.} \tag{10.16}$$

Rezolvând aceste egalități în raport cu puterile a treia,

$$\cos^3 x = \frac{3\cos x+\cos 3x}{4}, \qquad \sin^3 x = \frac{3\sin x-\sin 3x}{4}.$$

Putem astfel transforma puteri ale unor sinusoide în sume de sinusoide, fapt util atât la integrare, cât și la identificarea armonicilor.

10.6 Exemplul 6: două sinusoide devin una singură

Fie $A, B \in \mathbb{R}$, nu ambele zero. Dorim să simplificăm

$$A\cos x + B\sin x.$$

Observația-cheie este semnul din

$$A\cos x + B\sin x = \mathrm{Re}\big((A - \mathrm{j}B)\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}\big).$$

Alegem $R = \sqrt{A^2 + B^2} > 0$ și un unghi φ astfel încât $A = R\cos\varphi$, $B = R\sin\varphi$; echivalent, $\varphi \in \arg(A + \mathrm{j}B)$. Atunci $A - \mathrm{j}B = R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$ și

$$\boxed{A\cos x + B\sin x = R\cos(x - \varphi), \qquad R = \sqrt{A^2 + B^2}.} \tag{10.17}$$

De exemplu,

$$3\cos x + 4\sin x = 5\cos(x - \varphi), \qquad \varphi = \arctan\frac{4}{3} \quad \text{(cadranul I)}.$$

Pentru coeficienți de alte semne, unghiul trebuie ales în cadranul corect, nu doar calculat din $\arctan(B/A)$. Dacă $A = B = 0$, expresia este identic zero, iar faza nu este determinată.

Ce am câștigat? Nu doar o notație mai scurtă. Operațiile cu exponențiale oferă o metodă sistematică de a produce identități, iar un singur calcul furnizează adesea atât formula pentru cosinus, cât și pe cea pentru sinus.

11 Integrale reale rezolvate printr-un singur calcul complex

11.1 Ce înseamnă să integrăm o funcție cu valori complexe?

Variabila de integrare rămâne reală. Dacă $F(x) = f(x) + \mathrm{j}g(x)$, definim integrarea pe un interval real, componentă cu componentă:

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{j}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Prin urmare,

$$\mathrm{Re}\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}\,F(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{Im}\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Im}\,F(x)\,\mathrm{d}x.$$

La fel, dacă $G' = F$, atunci $(\mathrm{Re}\,G)' = \mathrm{Re}\,F$ și $(\mathrm{Im}\,G)' = \mathrm{Im}\,F$. Nu avem nevoie de integrale pe contururi sau de teoreme de analiză complexă: folosim doar două integrale reale simultan. Această metodă este numită și *complexificare* a calculului [3].

Avem nevoie de regula de derivare pentru $\mathrm{e}^{\lambda x}$, cu $\lambda = \alpha + \mathrm{j}\beta$ constant. Din (9.2),

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\beta)x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{j}\sin\beta x)\right] \\ &= \mathrm{e}^{\alpha x}\left[\alpha(\cos\beta x + \mathrm{j}\sin\beta x) + \beta(-\sin\beta x + \mathrm{j}\cos\beta x)\right] \\ &= (\alpha + \mathrm{j}\beta)\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\beta)x}.\end{aligned}$$

Deci, pentru $\lambda \neq 0$,

$$\int \mathrm{e}^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\lambda} + C, \qquad C \in \mathbb{C}. \tag{11.1}$$

Constanta complexă $C = C_1 + \mathrm{j}C_2$ reprezintă două constante reale independente.

11.2 Exemplul principal: $\int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x$

Dorim să calculăm

$$I = \int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

În loc să lucrăm doar cu partea reală, adăugăm și partea imaginară corespunzătoare:

$$\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{j}\mathrm{e}^x \sin x = \mathrm{e}^x(\cos x + \mathrm{j}\sin x) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{j})x}.$$

O primitivă a acestei funcții complexe este, prin (11.1),

$$G(x) = \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{j})x}}{1+\mathrm{j}}.$$

Raționalizăm numitorul:

$$\frac{1}{1+\mathrm{j}} = \frac{1-\mathrm{j}}{(1+\mathrm{j})(1-\mathrm{j})} = \frac{1-\mathrm{j}}{2}.$$

Revenim la sinus și cosinus și dezvoltăm:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{2}(1-\mathrm{j})(\cos x + \mathrm{j}\sin x) \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{2}\left[\cos x + \sin x + \mathrm{j}(\sin x - \cos x)\right]. \end{aligned}$$

Partea reală este răspunsul căutat:

$$\boxed{\int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\cos x + \sin x) + C_1.} \tag{11.2}$$

Partea imaginară oferă simultan cealaltă integrală:

$$\boxed{\int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x) + C_2.} \tag{11.3}$$

Aici $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sunt independente. A doua primitivă a fost obținută fără un nou calcul de integrare: era deja stocată în partea imaginară.

Verificare directă. Derivând partea dreaptă din (11.2),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{e}^x}{2}(\cos x + \sin x)\right] = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\cos x + \sin x - \sin x + \cos x) = \mathrm{e}^x \cos x.$$

Derivând expresia din (11.3), termenii cu cosinus se anulează, iar rezultatul este $\mathrm{e}^x \sin x$.

11.3 De ce este mai simplu decât integrarea prin părți?

Metoda reală obișnuită introduce două integrale cuplate. Dacă notăm cu I și K primitivele celor două funcții, integrarea prin părți conduce, până la constante, la

$$I = \mathrm{e}^x \cos x + K, \qquad K = \mathrm{e}^x \sin x - I.$$

Trebuie să aplicăm metoda de două ori și apoi să rezolvăm acest mic sistem. Calculul complex reunește sistemul într-o singură împărțire la $1+\mathrm{j}$. Nu produce o altă soluție; organizează mai eficient aceeași algebră reală.

Precauție. Nu scriem $\int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{(1+\mathrm{j})x} \, \mathrm{d}x$. Cele două funcții integrate nu sunt egale. Scrierea corectă este că o primitivă a primei se obține luând *partea reală* a unei primitive a celei de-a doua.

11.4 Formula generală: creștere sau amortizare și oscilație

Pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cu $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, avem

$$\frac{\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\beta)x}}{\alpha+\mathrm{j}\beta} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha - \mathrm{j}\beta)(\cos\beta x + \mathrm{j}\sin\beta x).$$

Dezvoltăm produsul și separăm componentele:

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x) + C_1,} \tag{11.4}$$

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x) + C_2.} \tag{11.5}$$

Dacă $\alpha = \beta = 0$, cele două integrale sunt $x + C_1$, respectiv C_2; acest caz nu se obține prin împărțire la $\alpha^2 + \beta^2$.

11.5 Un exemplu suplimentar: integrale pe un interval infinit

Fie $a > 0$ și $b \in \mathbb{R}$. Considerăm împreună integralele

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x.$$

Ambele sunt absolut convergente, fiind majorate în modul de integrala $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = 1/a$. Pe un interval finit,

$$\int_0^T \mathrm{e}^{(-a+\mathrm{j}b)x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{j}b)T} - 1}{-a+\mathrm{j}b}.$$

Deoarece $|\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{j}b)T}| = \mathrm{e}^{-aT} \to 0$, putem trece la limită:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{\mathrm{j}bx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-\mathrm{j}b} = \frac{a+\mathrm{j}b}{a^2+b^2}.$$

Rezultă imediat

$$\boxed{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2+b^2}.} \tag{11.6}$$

De exemplu, pentru $a = 2$, $b = 3$, răspunsurile sunt $2/13$ și $3/13$. Condiția $a > 0$ este esențială pentru argumentul de convergență folosit aici.

12 Oscilații, ecuații diferențiale și inginerie electrică

12.1 Un vector care se rotește conține și sinusul, și cosinusul

Pentru $A > 0$ și $\omega > 0$, funcția

$$z(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}$$

descrie un punct care se rotește uniform pe cercul de rază A. Proiecțiile sale sunt

$$\operatorname{Re} z(t) = A\cos(\omega t+\varphi), \qquad \operatorname{Im} z(t) = A\sin(\omega t+\varphi).$$

În baza e_1, e_2 din Secțiunea 1.2, același semnal complex este vectorul real

$$v(t) = A\cos(\omega t+\varphi)e_1 + A\sin(\omega t+\varphi)e_2 = A\begin{pmatrix}\cos(\omega t+\varphi)\\ \sin(\omega t+\varphi)\end{pmatrix}.$$

Sinusul și cosinusul nu sunt două rotații diferite: sunt cele două coordonate ale aceleiași rotații. Pentru $A = 1$, regăsim exact vectorul unitar din (1.2). La $\omega < 0$, sensul rotației este invers.

Derivarea are o interpretare geometrică foarte simplă:

$$z'(t) = \mathrm{j}\omega z(t).$$

Înmulțirea cu j rotește vectorul cu $\pi/2$, iar înmulțirea cu ω îi scalează lungimea. Viteza este, deci, tangentă la cerc, perpendiculară pe raza instantanee.

Mai general,

$$z(t) = A\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\omega)t}$$

are modulul $A\mathrm{e}^{\alpha t}$ și unghiul ωt. Pentru $\omega \neq 0$ și $\alpha < 0$ obținem o spirală spre origine; pentru $\alpha > 0$, o spirală care se depărtează de origine. Partea reală este o oscilație cu amplitudine exponențial variabilă.

12.2 O ecuație diferențială reală devine o ecuație algebrică

Să rezolvăm

$$y'(t) + 2y(t) = \cos 3t. \tag{12.1}$$

Introducem problema complexă

$$z'(t) + 2z(t) = \mathrm{e}^{3\mathrm{j}t}.$$

Căutăm o soluție particulară $z_p(t) = K\mathrm{e}^{3\mathrm{j}t}$, unde $K \in \mathbb{C}$ este constant. Prin înlocuire,

$$(2 + 3\mathrm{j})K\mathrm{e}^{3\mathrm{j}t} = \mathrm{e}^{3\mathrm{j}t}, \qquad K = \frac{1}{2+3\mathrm{j}} = \frac{2-3\mathrm{j}}{13}.$$

Prin urmare,

$$z_p(t) = \frac{2\cos 3t + 3\sin 3t}{13} + \mathrm{j}\frac{2\sin 3t - 3\cos 3t}{13}.$$

Partea reală rezolvă (12.1), iar partea imaginară rezolvă $y' + 2y = \sin 3t$. Soluția generală a primei ecuații este

$$\boxed{y(t) = \frac{2\cos 3t + 3\sin 3t}{13} + C\mathrm{e}^{-2t}, \qquad C \in \mathbb{R}.} \tag{12.2}$$

Termenul omogen trebuie păstrat dacă avem condiții inițiale. De exemplu, $y(0) = 0$ impune $C = -2/13$.

Metoda funcționează deoarece operatorul $L[y] = y' + 2y$ are coeficienți reali și este liniar:

$$L[\operatorname{Re} z] = \operatorname{Re} L[z], \qquad L[\operatorname{Im} z] = \operatorname{Im} L[z].$$

Același principiu se aplică altor operatori diferențiali liniari cu coeficienți reali. Nu trebuie extins fără verificare la ecuații neliniare: în general, $\operatorname{Re}(z^2) \neq (\operatorname{Re} z)^2$.

12.3 Fazorul: amplitudinea și faza într-un singur număr

La o frecvență fixată ω, semnalul real

$$u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

poate fi scris

$$u(t) = \operatorname{Re}\bigl(\widehat{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\bigr), \qquad \widehat{U} = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}.$$

Numărul complex constant $\widehat{U}$ se numește *fazor*: păstrează amplitudinea și faza, în timp ce frecvența este ținută implicit fixă. Aici A este amplitudinea de vârf, nu valoarea eficace. Reprezentarea

fazorială și calculul impedanțelor sunt standard pentru regimul permanent sinusoidal al circuitelor liniare [4].

Regula de derivare se reduce la o înmulțire:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = \mathrm{Re}(\mathrm{j}\omega\widehat{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}).$$

Deci *derivarea corespunde înmulțirii fazorului cu* $\mathrm{j}\omega$. Integrarea componentei sinusoidale corespunde împărțirii cu $\mathrm{j}\omega$, pentru $\omega \neq 0$; o constantă de integrare se tratează separat.

12.4 De la rezistență la impedanță

Notăm cu $u(t)$ tensiunea și cu $i(t)$ curentul. Pentru elemente ideale, relațiile temporale și consecințele lor fazoriale sunt

Element	Relația în timp	Relația între fazori
Rezistor	$u = Ri$	$\widehat{U} = R\widehat{I}$
Bobină	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$\widehat{U} = \mathrm{j}\omega L\widehat{I}$
Condensator	$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$\widehat{I} = \mathrm{j}\omega C\widehat{U}$

Definind impedanța prin $\widehat{U} = Z\widehat{I}$, obținem

$$\boxed{Z_R = R, \qquad Z_L = \mathrm{j}\omega L, \qquad Z_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\frac{\mathrm{j}}{\omega C}.} \tag{12.3}$$

Aceste formule folosesc convenția temporală $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ și $\omega > 0$. Un semn imaginar nu înseamnă o „tensiune imaginară” măsurată cu voltmetrul: codifică defazajul dintre două semnale reale. De exemplu, la bobina ideală, tensiunea este în avans cu $\pi/2$ față de curent, deoarece fazorul tensiunii conține factorul j.

Exemplu 12.1 (Circuit serie cu rezistor și bobină)**.** Presupunem $R = 3\,\Omega$, $\omega L = 4\,\Omega$ și $u(t) = 10\cos(\omega t)\,\mathrm{V}$. Atunci

$$Z = 3 + 4\mathrm{j}\ \Omega, \qquad \widehat{I} = \frac{10}{3+4\mathrm{j}} = \frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{j}\ \mathrm{A}.$$

Modulul este 2 A, iar un argument este $-\varphi$, unde $\varphi = \arctan(4/3)$. Curentul în regim permanent este

$$i(t) = 2\cos(\omega t - \varphi)\,\mathrm{A}.$$

Curentul rămâne în urmă față de tensiune. Calculul unei amplitudini și al unui defazaj s-a redus la o împărțire complexă.

Acest calcul descrie regimul permanent sinusoidal. Soluția completă după conectarea unei surse poate conține și termeni tranzitorii, determinați de condițiile inițiale, exact ca în exemplul cu ecuația (12.1).

13 De ce numere complexe în mecanica cuantică?

13.1 Mai întâi, distincția care contează

La integrale și la circuite am pornit de la o problemă reală, am rezolvat una complexă auxiliară și am extras partea reală. În formularea standard a mecanicii cuantice, funcția de undă este ea însăși o amplitudine complexă; nu se înlocuiește, în general, cu partea ei reală. Ecuația de evoluție conține explicit unitatea imaginară [5, 7].

Sinusul și cosinusul au multe utilizări și pot fi soluții ale unor ecuații reale. Ceea ce poate eșua este folosirea lor, separat, drept soluții ale aceleiași ecuații cuantice de ordinul întâi. Exemplul următor arată exact de ce.

13.2 Un singur nivel de energie: o ecuație complet explicită

Pentru un sistem cu operator al energiei H independent de timp, ecuația Schrödinger este

$$\mathrm{j}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} > 0. \tag{13.1}$$

Am înlocuit notația fizică obișnuită i cu j, fără a schimba ecuația. Fie φ un mod propriu nenul, cu energie reală E, adică $H\varphi = E\varphi$. Căutăm o soluție de forma $\psi(x,t) = \varphi(x)c(t)$. Înlocuirea în (13.1) reduce problema la

$$\boxed{\mathrm{j}\hbar c'(t) = Ec(t), \qquad c(0) = 1.} \tag{13.2}$$

Aceasta este evoluția temporală a unui mod de energie bine determinată [6]. Notăm $\omega = E/\hbar$ și obținem

$$\boxed{c(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} = \cos(\omega t) - \mathrm{j}\sin(\omega t).} \tag{13.3}$$

Într-adevăr, $c' = -\mathrm{j}\omega c$, iar $\mathrm{j}\hbar c' = \hbar\omega c = Ec$ și $c(0) = 1$.

13.3 De ce nu funcționează doar cosinusul sau doar sinusul?

Presupunem acum $E \neq 0$, deci $\omega \neq 0$. Dacă $c(t)$ ar fi reală pentru orice t, atunci $\mathrm{j}\hbar c'(t)$ ar fi pur imaginar, în timp ce $Ec(t)$ ar fi real. Egalitatea celor două ar impune simultan

$$c'(t) = 0, \qquad Ec(t) = 0.$$

Deoarece $E \neq 0$, singura soluție reală a ecuației ar fi $c = 0$, incompatibilă cu $c(0) = 1$.

Putem verifica și direct. Pentru $c(t) = \cos\omega t$,

$$\mathrm{j}\hbar c'(t) = -\mathrm{j}E\sin\omega t, \qquad Ec(t) = E\cos\omega t.$$

La $t = 0$ obținem 0 în stânga și E în dreapta, deci ecuația nu este satisfăcută. Pentru $c(t) = \sin\omega t$, la $t = 0$ obținem $\mathrm{j}E$ în stânga și 0 în dreapta: nici aceasta nu este soluție. Combinația (13.3) le cuplează exact în proporția și cu semnul necesar.

În schimb, ambele funcții sunt soluții ale ecuației reale

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Aceasta este o *altă ecuație*. Ecuația cuantică de ordinul întâi implică ecuația de ordinul doi, dar reciproca nu este adevărată fără condiția suplimentară asupra derivatei. În exemplul nostru, $c'(0) = -\mathrm{j}\omega$ este fixată de ecuația de ordinul întâi.

13.4 Două componente reale există, dar sunt cuplate

Scriem $c = u + \mathrm{j}v$, cu u, v reale. Atunci

$$\mathrm{j}\hbar(u' + \mathrm{j}v') = E(u + \mathrm{j}v)$$

devine, prin separarea părților reală și imaginară,

$$\boxed{u' = \omega v, \qquad v' = -\omega u, \qquad u(0) = 1, \quad v(0) = 0.} \tag{13.4}$$

Soluția este $u = \cos\omega t$, $v = -\sin\omega t$. Fiecare componentă o determină pe cealaltă prin derivare: nu sunt două probleme de evoluție independente.

Aceasta este exact ideea $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ din Secțiunea 1. Putem rescrie calculul cu două coordonate reale, dar trebuie să păstrăm întreaga structură de cuplaj:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Din (13.4) rezultă imediat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u^2 + v^2) = 2u\omega v - 2v\omega u = 0.$$

Astfel, $|c(t)|^2 = u^2 + v^2 = 1$: amplitudinea se rotește fără să-și schimbe modulul. Rotația este în planul *amplitudinii*, nu o afirmație că particula se deplasează pe un cerc în spațiul fizic.

Pentru o funcție de undă întreagă $\psi = u + \mathrm{j}v$, dacă H trimite funcțiile reale în funcții reale, aceeași separare dă

$$\hbar\frac{\partial u}{\partial t} = Hv, \qquad \hbar\frac{\partial v}{\partial t} = -Hu.$$

De exemplu, această ipoteză este îndeplinită pentru $H = -\hbar^2\partial_x^2/(2m) + V(x)$ cu potențial real V. Din nou: o ecuație complexă este echivalentă cu un *sistem* de două ecuații reale, nu cu păstrarea arbitrară a unei singure componente.

13.5 Ce nu trebuie să concluzionăm din acest exemplu

Dacă $E = 0$, ecuația (13.2) permite $c(t) = 1$, reală. În plus, o parte spațială $\varphi(x)$ poate fi reală, chiar dacă factorul temporal este complex.

Faza unui singur mod se poate elimina prin schimbarea originii energiei. Dar o singură astfel de alegere nu elimină toate fazele relative între niveluri cu energii diferite. Exemplul demonstrează de ce proiecția pe partea reală nu păstrează în general ecuația dată; nu demonstrează că ar fi imposibilă orice reformulare a mecanicii cuantice în variabile reale. Chiar (13.4) este o reformulare reală explicită a problemei noastre.

13.6 De la amplitudine complexă la probabilitate reală

În reprezentarea poziției, pentru o funcție de undă normalizată,

$$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = \overline{\psi(x,t)}\psi(x,t)$$

este densitatea de probabilitate. Probabilitatea de a găsi particula într-un interval $[a,b]$ este $\int_a^b \rho(x,t)\,\mathrm{d}x$, iar integrala pe întregul spațiu este 1. Într-o bază discretă, probabilitățile sunt modulele la pătrat ale amplitudinilor corespunzătoare [8, 7].

O fază globală nu schimbă aceste probabilități, deoarece

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}\psi|^2 = |\psi|^2.$$

În schimb, *diferențele de fază* dintre contribuții pot schimba probabilitatea unui rezultat. Pentru alternative indistinctibile care conduc la același rezultat, se adună amplitudinile înainte de a lua modulul la pătrat [8].

Un model normalizat cu două rezultate are amplitudinile

$$A_+(\delta) = \frac{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta}}{2}, \qquad A_-(\delta) = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta}}{2}.$$

Calculăm

$$\begin{aligned} |A_+(\delta)|^2 &= \frac{1}{4}(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta})(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta}) \\ &= \frac{2 + 2\cos\delta}{4} = \cos^2\frac{\delta}{2}, \end{aligned}$$

iar analog $|A_-(\delta)|^2 = \sin^2(\delta/2)$. Suma este 1.

Pentru $\delta = 0$, prima probabilitate este 1; pentru $\delta = \pi$, este 0. În al doilea caz,

$$A_+(\pi) = \frac{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}}{2} = 0.$$

Identitatea lui Euler descrie aici o anulare de amplitudini: două contribuții egale în modul și opuse în fază se anulează. Probabilitățile individuale, fiind nenegative, nu ar putea codifica singure această anulare. Acesta este un motiv concret pentru a păstra faza, nu doar modulul amplitudinii.

14 Electromagnetismul și cercul fazelor: grupul $U(1)$

14.1 Ce înseamnă, mai precis, că electromagnetismul este o teorie cu simetrie $U(1)$?

Formularea precisă este: **electromagnetismul este o teorie de etalonare, numită și teorie *gauge*, cu grupul $U(1)$.** Transformările de etalonare schimbă reprezentarea matematică a aceluiași sistem, nu câmpurile fizice măsurabile. Cercul care apare aici este *cercul fazelor complexe*, nu o traiectorie obligatoriu circulară a particulelor și nici o condiție ca lungimea câmpului electric să fie 1 [9].

Notația $U(1)$ înseamnă grupul matricelor *unitare* de dimensiune 1×1. O asemenea matrice are un singur element complex u; condiția de unitaritate se reduce la

$$\overline{u}\,u = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |u| = 1.$$

Prin formula lui Euler,

$$\boxed{U(1) = \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\} = \{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} : \theta \in \mathbb{R}\} = \{\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta : \theta \in \mathbb{R}\}.} \tag{14.1}$$

Așadar, $U(1)$ este *cercul unitate împreună cu înmulțirea complexă.* Elementul neutru este 1, inversul lui $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ este $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$, iar compunerea înseamnă adunarea unghiurilor:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha+\beta)}.$$

Unghiurile θ și $\theta + 2\pi k$ descriu același element. Înmulțirea este comutativă, de aceea grupul se numește *abelian.* Cifra 1 din $U(1)$ se referă la dimensiunea *complexă* a matricelor, nu la o singură axă reală: regăsim distincția din Secțiunea 1.2.

14.2 Calculul cel mai simplu: de ce apare tocmai un cerc?

Considerăm o amplitudine complexă ψ și înmulțirea ei cu un scalar $u = a + jb$. Cerem ca *pentru orice amplitudine* să se păstreze modulul la pătrat, folosit în calculul probabilităților. Atunci

$$|u\psi|^2 = |\psi|^2 \quad \text{pentru orice } \psi \quad \Longleftrightarrow \quad |u|^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Ultima egalitate este chiar ecuația cercului unitate. Prin urmare, factorii scalari complecși care păstrează modulul sunt exact rotațiile de fază $u = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$. Restricția la înmulțirea cu un scalar complex este importantă; nu clasificăm aici toate transformările posibile ale unui sistem cuantic.

Dacă $\psi = \psi_{\mathrm{R}} + \mathrm{j}\psi_{\mathrm{I}}$, înmulțirea cu acest factor se scrie în coordonate reale

$$\begin{pmatrix} \psi'_{\mathrm{R}} \\ \psi'_{\mathrm{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{R}} \\ \psi_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}. \tag{14.2}$$

Pentru $\psi = 1$, vectorul rezultat este exact $(\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2$ din (1.2). Pentru o amplitudine oarecare, se schimbă unghiul, nu lungimea. *Factorul* u este pe cercul unitate; funcția de undă ψ nu este obligată să aibă modulul 1 în fiecare punct.

Acest calcul explică grupul fazelor. **El nu deduce, singur, electromagnetismul din geometria unui cerc.** Legătura suplimentară este felul în care fazele dependente de poziție și timp se combină cu potențialele electromagnetice.

14.3 De la o fază constantă la o fază locală

Fie $\psi(\mathbf{r}, t)$ funcția de undă a unei particule încărcate, unde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ este poziția. O schimbare *globală* folosește același unghi constant peste tot: $\psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0}\psi$. O schimbare *locală* permite câte un unghi în fiecare punct și moment:

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(\mathbf{r},t)}\psi(\mathbf{r}, t), \qquad \theta(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}. \tag{14.3}$$

În fiecare punct, multiplicatorul aparține aceluiași $U(1)$. Geometric, ne putem imagina că alegem local altă origine pentru măsurarea unghiurilor în planul amplitudinii.

În continuare, modulul la pătrat rămâne neschimbat. Dar derivata obișnuită observă variația unghiului. De exemplu, regula produsului dă

$$\partial_x\psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\big(\partial_x\psi + \mathrm{j}(\partial_x\theta)\psi\big). \tag{14.4}$$

Termenul suplimentar dispare pentru o fază constantă, dar nu în general. De aceea, schimbarea locală a lui ψ *fără* o schimbare corespunzătoare a potențialelor nu păstrează aceeași ecuație de mișcare. Acesta este pasul care leagă faza de electromagnetism [10].

14.4 Potențialele compensează variația fazei

Folosim unitățile SI. Notăm cu $q \neq 0$ sarcina particulei, cu $m > 0$ masa, cu $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ potențialul vector și cu $\phi(\mathbf{r}, t)$ potențialul scalar. Potențialele sunt reale. Presupunem toate funcțiile suficient de netede pentru derivatele folosite. Introducem o funcție reală $\chi(\mathbf{r}, t)$ și scriem $\theta = q\chi/\hbar$, astfel încât exponentul să fie adimensional. Transformarea de etalonare este

$$\boxed{\psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{j}q\chi/\hbar}\psi, \qquad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi, \qquad \phi' = \phi - \partial_t\chi.} \tag{14.5}$$

Aici $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ este operatorul gradient. Aceste semne corespund convenției de cuplaj electromagnetic folosite mai jos [10].

Înlocuim derivata spațială prin operatorul

$$D_{\mathbf{A}}\psi := \nabla\psi - \frac{\mathrm{j}q}{\hbar}\mathbf{A}\psi,$$

numit *derivată covariantă*. Denumirea se explică printr-un calcul. Punând $u = \mathrm{e}^{\mathrm{j}q\chi/\hbar}$, avem

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{A}'}\psi' &= \nabla(u\psi) - \frac{\mathrm{j}q}{\hbar}(\mathbf{A} + \nabla\chi)u\psi \\ &= u\left[\nabla\psi + \frac{\mathrm{j}q}{\hbar}(\nabla\chi)\psi - \frac{\mathrm{j}q}{\hbar}\mathbf{A}\psi - \frac{\mathrm{j}q}{\hbar}(\nabla\chi)\psi\right] \\ &= u\, D_{\mathbf{A}}\psi. \end{aligned}$$

Cei doi termeni cu $\nabla\chi$ se anulează exact. **Derivata corectată se rotește cu același factor ca amplitudinea.** În acest sens, potențialul permite compararea fazelor din puncte vecine.

Pentru derivata temporală, alegerea corespunzătoare este

$$D_{t,\phi}\psi := \partial_t\psi + \frac{\mathrm{j}q}{\hbar}\phi\psi.$$

Verificarea are aceeași structură:

$$\begin{aligned} D_{t,\phi'}\psi' &= u\left[\partial_t\psi + \frac{\mathrm{j}q}{\hbar}(\partial_t\chi)\psi + \frac{\mathrm{j}q}{\hbar}(\phi - \partial_t\chi)\psi\right] \\ &= u\, D_{t,\phi}\psi. \end{aligned}$$

Pentru o particulă nerelativistă fără spin, ecuația Schrödinger cu cuplaj electromagnetic minimal este

$$\mathrm{j}\hbar\partial_t\psi = \left[\frac{1}{2m}(-\mathrm{j}\hbar\nabla - q\mathbf{A})^2 + q\phi\right]\psi. \tag{14.6}$$

Pătratul operatorului înseamnă suma compunerilor celor trei componente spațiale, inclusiv derivarea potențialelor atunci când acestea variază. Ecuația se poate scrie și

$$\mathrm{j}\hbar D_{t,\phi}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3} D_{\mathbf{A},k}D_{\mathbf{A},k}\psi.$$

Din calculele precedente, ambii membri se înmulțesc cu același u sub (14.5). Prin urmare, ψ' satisface ecuația cu $\mathbf{A}', \phi'$ exact când ψ o satisface cu $\mathbf{A}, \phi$. Nu presupunem potențialele constante și nu eliminăm termenii cu derivatele lor.

14.5 Verificarea fizică: aceleași câmpuri electric și magnetic

Potențialele determină câmpurile prin

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A},$$

unde $\nabla\times$ este operatorul rotor. Pentru câmpul magnetic transformat,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\chi) \\ &= \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla\chi}_{0} = \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Pentru câmpul electric,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\nabla(\phi - \partial_t\chi) - \partial_t(\mathbf{A} + \nabla\chi) \\ &= -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A} + \underbrace{\nabla\partial_t\chi - \partial_t\nabla\chi}_{0} = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Anulările folosesc egalitatea derivatelor mixte. Am schimbat faza și potențialele, dar nu câmpurile fizice. Aceasta este o redundanță utilă a descrierii, nu o modificare a experimentului [9].

Simetria de etalonare nu este același lucru cu rotația temporală a unui fazor dintr-un circuit. Cele două folosesc aceeași algebră complexă, dar au interpretări fizice diferite. De asemenea, simetria $U(1)$ nu stabilește singură toate ecuațiile dinamicii; aici am folosit explicit modelul Schrödinger cu cuplaj minimal, nu am dedus întreaga teorie Maxwell.

14.6 Un exemplu explicit: faza se rotește, dar câmpurile rămân nule

Pornim în $\mathbb{R}^3$ de la $\mathbf{A} = 0$, $\phi = 0$ și de la o funcție de undă $\psi(\mathbf{r}, t)$. Alegem $\kappa > 0$, cu unitatea de măsură inversul lungimii, și

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar\kappa}{q} x.$$

Atunci

$$\psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa x}\psi, \qquad \mathbf{A}' = \left(\frac{\hbar\kappa}{q}, 0, 0\right), \qquad \phi' = 0.$$

Vectorul $\mathbf{A}'$ este constant; prin urmare, $\mathbf{E}' = \mathbf{B}' = 0$, deși $\mathbf{A}' \neq 0$. Pentru componenta pe axa x a operatorului de impuls, calculul este

$$\begin{aligned}(-\mathrm{j}\hbar\partial_x - qA'_x)\psi' &= -\mathrm{j}\hbar\partial_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa x}\psi) - \hbar\kappa\mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa x}\psi \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa x}\left[\hbar\kappa\psi - \mathrm{j}\hbar\partial_x\psi - \hbar\kappa\psi\right] \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa x}(-\mathrm{j}\hbar\partial_x\psi).\end{aligned}$$

Variația fazei a introdus $+\hbar\kappa\psi$, iar potențialul a introdus exact opusul lui. Fără transformarea lui $\mathbf{A}$, anularea nu ar exista.

Factorul de fază vizitează succesiv punctele

x	0	$\pi/(2\kappa)$	π/κ	$2\pi/\kappa$
$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa x}$	1	j	-1	1

Cercul apare în spațiul *valorilor factorului complex*, în timp ce x este o coordonată spațială obișnuită. Nimic nu obligă particula să se miște circular. Dacă ψ este o soluție liberă, ψ' este aceeași stare fizică descrisă cu potențialele transformate.

14.7 O fază care are un efect observabil: interferența magnetică

Fazele arbitrare de etalonare nu sunt observabile, dar anumite diferențe de fază sunt. Un exemplu este efectul Aharonov–Bohm: două căi coerente ale unei particule încărcate pot înconjura un flux magnetic, chiar dacă $\mathbf{B} = 0$ de-a lungul ambelor căi. În configurația magnetică statică, contribuția fluxului la diferența de fază este [11]

$$\delta_B = \frac{q}{\hbar}\oint_\Gamma \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \frac{q\Phi_B}{\hbar}, \qquad \Phi_B = \int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S, \tag{14.7}$$

unde Γ merge pe prima cale și revine pe a doua, iar S este suprafața orientată delimitată de Γ. A doua egalitate este teorema lui Stokes, pentru potențiale netede pe suprafața aleasă. Factorul corespunzător este, din nou,

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_B} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}q\Phi_B/\hbar} \in U(1).}$$

Pentru o funcție χ netedă și univocă, transformarea $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla\chi$ nu îl schimbă, deoarece

$$\oint_\Gamma \nabla\chi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 0.$$

Deci acest factor nu depinde de convenția locală de fază. În modelul echilibrat cu două rezultate din Secțiunea 13, cu celelalte diferențe de fază reglate la zero, probabilitățile devin

$$P_+ = \cos^2\left(\frac{q\Phi_B}{2\hbar}\right), \qquad P_- = \sin^2\left(\frac{q\Phi_B}{2\hbar}\right).$$

O variație a fluxului rotește un factor pe cercul unitate, iar interferența transformă acea rotație într-o variație a probabilităților reale. Nu orice potențial cu câmp nul de-a lungul căilor se poate elimina global: conturul închis poate înconjura regiunea cu flux nenul.

Legătura cu restul cursului. Același obiect $\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$ este un vector unitar în plan, un factor de fază pentru un semnal și un element al grupului $U(1)$. În fiecare caz, formula lui Euler descrie aceeași geometrie; ceea ce diferă este semnificația fizică a vectorului și a unghiului.

15 Câteva rezultate surprinzătoare și utile

15.1 Toate rădăcinile unui număr: un poligon regulat

Fie $w = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \neq 0$ și $n \geq 1$ întreg. Pentru a rezolva $z^n = w$, scriem $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$. Egalitatea cere

$$\rho^n = r, \qquad n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Prin urmare, cele n rădăcini distincte sunt

$$\boxed{z_k = r^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta+2k\pi)/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.} \tag{15.1}$$

Aici $r^{1/n}$ este rădăcina reală pozitivă a lui r. Unghiurile consecutive diferă prin $2\pi/n$: pentru $n \geq 3$ obținem vârfurile unui poligon regulat pe cercul de rază $r^{1/n}$. Pentru $w = 0$, singura soluție este $z = 0$, cu multiplicitate n.

De exemplu, ecuația $z^2 = \mathrm{j}$ are soluțiile

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4} = \frac{1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}} \quad \text{și} \quad z = -\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4} = -\frac{1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}}.$$

Nu trebuie inventat un nou tip de număr pentru „rădăcina lui j”: rezultatul este tot un număr complex obișnuit.

15.2 Rădăcinile unității se anulează și separă frecvențe

Fie $n \geq 2$ și $\zeta = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{j}/n}$. Atunci $\zeta^n = 1$, dar $\zeta \neq 1$. Formula sumei geometrice dă

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = \frac{1-\zeta^n}{1-\zeta} = 0. \tag{15.2}$$

Geometric, vectorii spre vârfurile poligonului regulat se echilibrează exact: suma lor este originea.

Mai general, pentru orice întreg m,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{j}km/n} = \begin{cases} n, & n \text{ divide } m, \\ 0, & n \text{ nu divide } m. \end{cases}} \tag{15.3}$$

Dacă n divide m, fiecare termen este 1. În caz contrar, rația $q = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{j}m/n}$ satisface $q \neq 1$ și $q^n = 1$, deci suma este zero, exact ca în (15.2).

Această identitate explică algebra din spatele *transformatei Fourier discrete*. Pentru date $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$, definim

$$X_m = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} mk/n}, \qquad m = 0, \dots, n-1.$$

Formula inversă este

$$x_\ell = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} X_m \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} m\ell/n}, \qquad \ell = 0, \dots, n-1. \tag{15.4}$$

Pentru verificare, înlocuim definiția lui X_m și schimbăm ordinea *sumelor finite*:

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} X_m \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} m\ell/n} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \left[\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} m(\ell-k)/n} \right].$$

Paranteza este 1 când $k = \ell$ și 0 în rest, prin (15.3). Rămâne exact x_ℓ. Astfel, anularea vectorilor pe cerc permite izolarea componentelor unei sume. Pentru date reale, coeficienții satisfac $X_{n-m} = \overline{X_m}$, pentru $1 \le m \le n-1$, fapt care rezultă prin conjugarea sumei și periodicitatea exponențialei.

15.3 Exponențiala ca limită a unor rotații foarte mici

Pentru orice $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\lim_{N \to \infty} \left(1 + \frac{\mathrm{j}\theta}{N}\right)^N = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}.} \tag{15.5}$$

Putem vedea geometric de ce. Fiecare factor are modulul $\sqrt{1 + \theta^2/N^2}$ și un argument $\arctan(\theta/N)$, deoarece partea sa reală este $1 > 0$. Prin urmare, produsul are modulul

$$\left(1 + \frac{\theta^2}{N^2}\right)^{N/2}$$

și un argument $N \arctan(\theta/N)$. Pentru modul folosim $0 \le \log(1+s) \le s$ pentru $s \ge 0$:

$$0 \le \log \left(1 + \frac{\theta^2}{N^2}\right)^{N/2} \le \frac{\theta^2}{2N} \longrightarrow 0.$$

Deci modulul tinde la 1. Pentru unghi,

$$N \arctan(\theta/N) \longrightarrow \theta,$$

din limita $\arctan t/t \to 1$ la $t \to 0$; cazul $\theta = 0$ este imediat. Prin continuitatea sinusului și cosinusului obținem (15.5).

Interpretarea este frumoasă: la fiecare pas adăugăm o deplasare mică perpendiculară pe vectorul curent,

$$z_{k+1} = z_k + \frac{\theta}{N} \mathrm{j} z_k, \qquad z_0 = 1.$$

Pentru N finit există și o mică dilatare. La limită, dilatarea totală dispare și rămâne rotația pură cu unghiul θ.

15.4 Logaritmul complex și surpriza j^{j}

Exponențiala complexă este periodică în direcția imaginară:

$$\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{z}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

De aceea, inversarea ei nu poate da o singură valoare fără o convenție suplimentară. Pentru $z \neq 0$, toate soluțiile ecuației $\mathrm{e}^{w} = z$ sunt

$$w = \ln|z| + \mathrm{j}(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{15.6}$$

Într-adevăr, dacă $w = a + \mathrm{j}b$, atunci $|\mathrm{e}^{w}| = \mathrm{e}^{a} = |z|$ impune $a = \ln|z|$, iar unghiul b trebuie să fie un argument al lui z.

Putem selecta valoarea $\operatorname{Log} z = \ln|z| + \mathrm{j}\operatorname{Arg} z$, cu convenția noastră $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$. Selecția unei valori nu elimină însă periodicitatea. De exemplu,

$$\operatorname{Log}((-1)(-1)) = \operatorname{Log} 1 = 0, \qquad \operatorname{Log}(-1) + \operatorname{Log}(-1) = 2\pi\mathrm{j}.$$

Așadar, legea reală $\log(zw) = \log z + \log w$ nu se transferă automat, ca egalitate exactă, unei selecții de logaritmi complecși.

Pentru puteri complexe folosim $z^{w} = \mathrm{e}^{w\ell}$, unde ℓ este o valoare aleasă a logaritmului lui z. Deoarece logaritmii lui j sunt $\mathrm{j}(\pi/2 + 2k\pi)$, valorile corespunzătoare lui j^{j} sunt

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\mathrm{j}(\pi/2+2k\pi)} = \mathrm{e}^{-\pi/2-2k\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z}.} \tag{15.7}$$

Toate aceste valori sunt reale și strict pozitive. Pentru alegerea $\ell = \mathrm{j}\pi/2$, valoarea este $\mathrm{e}^{-\pi/2} \approx 0{,}20788$. Nu este corect să declarăm o valoare unică fără a preciza convenția de logaritm folosită.

15.5 De ce nu putem ordona numerele complexe ca pe cele reale?

Pe $\mathbb{R}$ există o ordine compatibilă cu adunarea și înmulțirea: de exemplu, pătratul oricărui număr real este nenegativ. O asemenea ordine nu poate exista pe întregul corp $\mathbb{C}$.

Într-un corp ordonat, orice pătrat al unui element nenul este strict pozitiv: fie elementul, fie opusul său este pozitiv, iar pătratul este același. Aplicând aceasta lui 1, obținem $1 > 0$, deci $-1 < 0$. Aplicând-o lui j, am obține însă $\mathrm{j}^2 = -1 > 0$, contradicție.

Putem compara module, părți reale sau putem impune o ordine arbitrară asupra perechilor. Ceea ce nu putem obține este o ordine totală cu toate proprietățile algebrice ale ordinii reale.

Ideea unificatoare. Un număr complex poate fi privit simultan ca o pereche de coordonate, ca un vector, ca o rotație însoțită de o scalare și ca o amplitudine cu fază. Forma $a + \mathrm{j}b$ face vizibile componentele; forma $r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ face vizibile modulul și unghiul. Formula lui Euler nu alege între algebră, geometrie și trigonometrie: arată că acestea descriu aceeași structură. Puterea metodei constă în a schimba reprezentarea fără a pierde informație.

Referințe și lecturi suplimentare

[1] Massachusetts Institute of Technology, cursul 6.310, *Sisteme oscilante și forme polare*, material pregătitor de laborator, 2026. Secțiunea introductivă explică utilizarea lui j în ingineria electrică. Materialul original, disponibil online.

[2] Massachusetts Institute of Technology, cursul 18.013A, *Notații și reprezentarea geometrică a unui număr complex*, secțiunea 18.1. Discută reprezentarea prin vectori și înmulțirea complexă. Materialul original, disponibil online.

[3] Jeremy Orloff, MIT OpenCourseWare, ES.1803, *Numere complexe și exponențiale*, tema 4, 2024. Secțiunile 4.6–4.7 discută definiția trigonometrică, verificarea proprietăților și calculul integralelor prin complexificare. Notele originale, în format PDF.

[4] Manos Chaniotakis și David Cory, MIT OpenCourseWare, 6.071/22.071, *Răspunsul în regim permanent sinusoidal: reprezentarea în frecvență și impedanța*, 2006. Note despre fazori și relațiile dintre tensiune și curent pentru componente ideale. Notele originale, în format PDF.

[5] Barton Zwiebach, MIT OpenCourseWare, 8.04, *Rolul numerelor complexe în mecanica cuantică*, lecție video și transcriere, 2016. Discuția introductivă este detaliată aici prin exemplul scalar și prin precizarea cazurilor în care sunt posibile soluții reale. Lecția originală și transcrierea.

[6] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton și Matthew Sands, *Prelegerile Feynman de fizică*, volumul III, capitolul 8, *Matricea hamiltoniană*. Evoluția amplitudinilor și a stărilor cu energie determinată. Ediția online oficială, Caltech.

[7] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton și Matthew Sands, *Prelegerile Feynman de fizică*, volumul III, capitolul 16, *Dependența amplitudinilor de poziție*, în special secțiunile 16.1 și 16.5 despre funcția de undă și ecuația Schrödinger. Ediția online oficială, Caltech.

[8] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton și Matthew Sands, *Prelegerile Feynman de fizică*, volumul III, capitolul 3, *Amplitudini de probabilitate*. Explică regulile de combinare a amplitudinilor și rolul interferenței. Ediția online oficială, Caltech.

[9] David Tong, Universitatea din Cambridge, *Teoria câmpurilor de etalonare* (*Gauge Theory*), introducerea și capitolul 1, în special secțiunile 1.1.1–1.1.2. Discută redundanța de etalonare, grupul $U(1)$ și transformarea fazei unui câmp încărcat. Notele autorului, în format PDF.

[10] Massachusetts Institute of Technology, MIT OpenCourseWare, cursul 8.321, *Teoria cuantică I*, seminarul 5, 27 octombrie 2017, secțiunea 5.1: *Câmpurile de etalonare ca conexiuni*. Prezintă trecerea de la faze globale la faze locale, derivatele covariante și transformările potențialelor electromagnetice. Notele originale, în format PDF.

[11] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton și Matthew Sands, *Prelegerile Feynman de fizică*, volumul II, capitolul 15, *Potențialul vector*, în special secțiunea 15.5. Explică legătura dintre potențial, flux magnetic și diferența de fază într-un experiment de interferență cu particule încărcate. Ediția online oficială, Caltech.